

與「因數」對話

花蓮縣花蓮市中正國民小學教師 何欣玫

背景概述

本校位於花蓮市區，校地狹窄，商業發達，資訊刺激明顯相較於偏遠山區的學校多。原住民學生的比例並不高，家長的社經地位以工商職業較多，雖然參與學校活動的意願稍低，但普遍來說，非常重視學生的成績。而本校自創校以來以五十餘年，校史悠久，教師的教學態度及觀念都較保守。

本班學生共有 35 人，男生 15 人，女生 20 人。整體來說，該班學生都很活潑，有熱情，班級氣氛和諧有活力。而聽覺型及視覺型的學生大約所佔各半，語文成績較為平均，數學成績則有趨向於雙峰的趨勢。

我的想法

「因數」最主要的概念是奠基在整除的概念，在三年級上學期時，學生就已經學過除法算式及了解整除的概念；而倍數的學習，則是奠基在乘法的概念，這部分學童在二年級時就已經接觸過了。因此，我希望學生能以過去所了解的概念來學習因數與倍數。

我曾在臺中市、台中縣及花蓮縣三地四校任教過。擔任教職人員已十一年，大多數擔任高年級的導師，也喜歡跟高年級的孩子相處，喜歡數學，也喜歡教數學。每次五年級一開始的數學課就是碰到因數與倍數這個單元，以往我在教授此單元時，總是按照課本內容逐一講述，未曾思考教材

的內容編排方式是否符合學童的思維模式，更缺乏與學生對話，只著重自己在黑板上的講演。這樣的情況下來，發現對許多學生而言，這是一個學習上較為困難的單元，而困難的地方很多，其中例如以往在國小「數的計算」教材中通常提供二個以上的數字，學童再依題目的要求進行解題，但在因數與倍數時，卻只提供一個數字，尤其是因數的求得，必須以整除的概念為起點，從無到有逐一運算與判斷，而且還必須計算所有整除的數，也就是說，求某一個因數與倍數時，不像加減乘除或四則運算只求得一個合理的答案，必須依照題目，逐一判斷或運算。而從因數與倍數的定義來看，因數與倍數是屬於 Gagne 所提的概念學習，是由整除的概念抽象後再抽象而得的概念，因此是一個比較複雜高階的概念，所以此類概念的形必須經由定義來學習，無法直接透過觀察來獲得，必須運用語言或文字說明其屬性與定義。剛升上五年級的學生尚處於具體運思期，他們的思維能力只限於眼見的具體情境或熟悉經驗，因此因數與倍數概念的學習對他們而言是感困難的。

此外在 Vygotsky 的鷹架理論中提及學習者內在的心理能力之成長有賴教學者或能力較強的同儕協助，而這種協助應該建立在學習者當時的認知組織特質上。而在本單元的教材設計中，先教因數再教倍數，也就是要透過對因數的認知來學習倍數，但是其實一般學童相對於因數與倍數，對倍數反而較為熟悉，因為從二年級學習乘法開始，「倍」的概念即被帶入，所以，教材中以紙片排列成長方形或正方形的方式來學習因數時，一般學童其實都會以乘法的概念來思考，與課本所提及的除法算式是不同的。

民國 92 年公佈的九年一貫課程數學課程綱要中認為「數學是一種語言」且應培養學童的「數學溝通能力」。而 Palincsar & Brown 所提倡的放聲思考法，是希望學童能透過自我的話語把思考過程或解題的步驟說出

來。所以現在我在講授數學時，我會希望跟學生有較多的互動，學習數學不應只是侷限於數學解題，考試的成績優異而已，應該讓學生透過數學對話來表達自我的思維與對他人的理解，並以各種表徵方式為媒介，讓學生「聽說讀寫」數學，以提高其數學溝通的能力。當然要營造一個適合對話的情境，教師與學生關係及班級的氣氛就顯得格外重要，倘若教師只是一個權威者，以命令的話語來希望學生答話，這樣只會使學生揣摩老師的想法及附和教材的內容，並不會願意分享個人的概念，惟有老師放下身段之必然，而不是權威的象徵，和學生站在相同的高度，成爲一種合作關係來傾聽學生的想法，並且透過反思來調整自己的教學型態，這樣的教學才能達到真正的「對話」。

上課實錄

上課前，我會把該堂課所需用到的具體物先準備好，我喜歡學童以分組的方式就座，而小組成員的分派方式，我都會秉持著組內異質、組間同質的原則，因爲這樣的座位比較適合對話、討論及具備公平性。我並不是一個要求上數學課一定要絕對安靜的老師，我喜歡讓小組間有互動、合作及溝通的模式產生，但是該有的常規一定要遵守。在我事先看到教材內容中，是以分彈珠的方式來說明整除的概念，我即把具體物彈珠改成小積木，原因是彈珠會滾動，在操作分類時，容易因彈珠的滾動而分心及失序。

一、課前的叮嚀

「現在要開始上課了，請小朋友把桌上收拾一下。」我喜歡學生在上課時，桌上是乾淨的，只有數學課本及鉛筆盒，其他無關緊要的東西

通通不要在桌上，保持桌上的整齊。

「小瑜，快點收乾淨！」我以催促的方式，希望小瑜能快點清理桌面，和他同組的學童不斷的附和著我的話語，我知道如果我在一直盯著小瑜，全班就會一直把焦點放在她身上，然後會把和她有關的所有糾紛一再的挑明出來。

「今天我們要上的數學單元內容是什麼？」我察覺到接下來班上的討論重點會失焦，所以我趕緊拉回學生的思緒，將他們聚焦於今天要上的數學主題。

「因數與倍數」學生整齊的回答著。這時我注意到小瑜已經收拾好她的桌面，「現在每一組的小朋友都已經準備好了！」我再次的告知全班我要開始現在的課程了，請所有的同學都能集中精神於此。

小瑜是個全班人緣最不好的學生，她的動作及表情都非常的誇張，說話聲音很大聲而座位四週總是非常的髒亂，所以班上有些學生一逮到機會，總是要告知我她的不是，我得用我的話語，提醒他們我不想再聽他們對小瑜的數落了！

二、積木分堆

「現在請各組組長出來領取小積木」我用分組具體物操作的模式來開始我今天的課程。

「現在請各組將 6 個積木分成一堆一堆的，全部分完，而且每一堆的積木都要一樣多。」我用非常口語的方式告知全班操作的內容。一開始我並不會要求學童打開課本，因為他們就會依照課本內容的說明來講述，但這並不是他自己的思維內容。「老師希望每一個小朋友都要參與，我要給最棒的小組加花片。」

我喜歡用小組榮譽的方式來給予回饋，最主要是希望每一個學童都能參與該小組的操作與討論的過程，也希望身為小組的成員能提醒小組中分心的同學。每回學生討論時，我會巡視期間，找出小組中每一位學童都有熱烈參與的組別來給予花片，我不喜歡用老師的身份來告誡哪一位同學你必須參與你們那一組的討論過程，因為我知道他並不會真心參與，只是會做個樣子給我看而已，我並不需要做這徒勞無功的舉動來破壞班上討論的氣氛。

「好，現在有哪一組的小朋友可以告訴我們，你們那一組分成了幾堆，每一堆中有幾個積木？」我開始丟出今天的第一個問題，目的是希望他們能透過具體物的操作來複習整除的概念。

幾乎所有組別都有學童舉手，我點了小瑜那組的組長回答，因為他們只要針對問題回答出來，我就會加該組的花片，而該組常常因為小瑜被扣花片，所以若有機會我就會先讓他們得花片，以免他們對小瑜的反彈愈大。幸千很有自信的說：「分成兩堆時，每堆有 3 個；分成 3 堆時，每堆有 2 個；分成 6 堆時，每堆有 1 個」

「說得很棒！那還有其他分法嗎？」在邊說的同時，我給第六組加一個花片，也在暗示學童還有其他的分法，請其他小組的學童補充說明完整。學童很快知道我話中的意思，馬上又有許多的學童舉手。我點了第一組的楚君回答，最主要因為他剛剛在小組討論時，被小組成員不斷的提醒要參與其中，而我也在暗示楚君我有留意到他的不專心。

「全部分成一堆，一堆有六個。」楚君小心翼翼的回答。「完全正確」我用強烈的語氣告知全班我的問題已得到完整的答案，而另一方面也在增強楚君參與小組討論的行為。

「接下來，請各組拿出 12 個積木分成一堆一堆的，全部分完，而

且每一堆的積木都要一樣多。」我並不急著要求學生說出算式，因為他們才剛升上五年級，其思維能力還是很重視具體的情境，所以同樣的操作方式再做一次，只是數量增多了。雖然數量增多了，可是全班幾乎都已經知道老師要問的問題，所以操作與討論的時間並沒有增加，我看大多數的組別都已經討論完畢，趕緊將剛剛的問題再問一次。「好，現在有哪一組的小朋友可以告訴我們，你們那一組分成了幾堆，每一堆中有幾個積木？」他們似乎早就知道老師要問的問題了，所以這次有更多的學童舉手了。我點了第五組的芳瑜回答，每一次上課時，我都會儘量叫不同組的學生回答，以保持我的中立與公平性。

芳瑜趕緊起身的回答說：「分成3堆時，每堆有4個；分成6堆時，每堆有2個；分成4堆時，每堆有3個；分成……」我明瞭她知道還有其他的分法，只是跳著說，已經忘記自己說過那些了。我見狀趕緊替她打圓場，因為芳瑜是一個較為內向的學生，能舉手就已經很不錯了，若是因為說不下去而引來同學的側目，我想他下次就不會願意再回答了，於是我緊接著說：「芳瑜都說對了，那有沒有哪個小朋友可以幫我們整理一下，從堆數最少的說到堆數最多的，而且把全部的分法都說出來。」

「我們請第二組的昀隆來告訴我們答案。」我會叫昀隆是因為我知道他會回答出所有正確的答案，在現在的情況我希望找一個學生來總結這個問題的答案，並結束這部份的操作。

昀隆不疾不徐的說：「分成1堆時，每堆有12個；分成2堆時，每堆有6個；分成3堆時，每堆有4個；分成4堆時，每堆有3個；分成6堆時，每堆有2個；分成12堆時，每堆有1個。」「耶！」他們那一組小聲的發出歡呼聲，因為他們知道他們得到花片了。

「好，請坐。謝謝昀隆告知我們答案，他講得又完整又正確。」

「請、謝謝、對不起」這三個語辭我並不會吝嗇於對學生說出，因為我不想塑造出強勢的形象，我要讓他們知道我是尊重他們的，也希望營造出和諧的班級氣氛，我注意到，多說這三個詞語會使他們降低自我的防衛機制及對我的戒心，相對的，也會教願意在課堂上舉手分享自我的想法。

三、具體物、算式及語言的轉換

「現在有沒有哪一組的小朋友可以將剛剛 12 個積木的分法在黑板上寫成算式，並且告知我們為什麼要這樣列？」為了避免他們誤會是要寫 6 個積木的，所以我刻意將將 12 個積木加重語氣的說明清楚。我會問這個問題是因為我要引導他們從具體圖像轉換成符號，並且用語言說出，數學概念的陳述方式其實就是這三者之間的游移。

全班對這突如其來的問題先是愣了一下，接著陸陸續續有學生舉手，我點了一個還未叫到的組別的成員回答，「柏安，你上來寫寫看。」

柏安在黑板上寫著「 $12 \div 2 = 6$ 、 $12 \div 4 = 3$ 、 $12 \div 6 = 2$ 、 $12 \div 3 = 4$ 」他停了下來，示意他已經寫完了，我接著問他，「你能說一說你為什麼這樣寫嗎？」他解釋著「有 12 個積木，分成兩堆，每堆有 6 個；分成 4 堆，每堆有 3 個；分成 6 堆，每堆有兩個分成 3 堆，每堆有 4 個」我知道叫他們講述這種分分看的概念一定不難，但是要說的完整，對許多學生而言仍是一個挑戰，因為他們的思維仍是不夠細膩，容易有缺漏的情況產生。「好，我們謝謝柏安。但是，沒有了嗎？有沒有哪一個同學可以幫他補充的。」許多學童隨即舉手「我們請同組的思涵上來寫寫看」思涵在黑板上寫了另外兩個算式「 $12 \div 1 = 12$ 、 $12 \div 12 = 1$ 」也說明著「有 12 個積木，全部分成一堆，這堆有 12 個；分成 12 堆，每堆有 1 個」

四、概念的形成

「那我們現在把黑板上的算式整理一下，由除數少的寫到除數多的。」我重新寫一遍，又再次的強調數字間的順序關係，提醒他們這樣才比較不會遺漏。

「請問一下，黑板上的這些算式，餘數都是多少？」

「0」全班異口同聲的說。

「那我可不可以將12個積木分成5堆、7堆、8堆、9堆、10堆、11堆呢？」我邊問邊把算式寫下來。

「不可以」全班再次異口同聲的說。

「為什麼？」這時全班頓了一下，不再一起回答，我知道剛剛的回答對許多學生而言只是慣例式的回答，根本沒有思考，所以我要拋出一個需要思考的問題，以拉回他們的注意力。

「因為這樣的話，12個積木就不能全部分完。」子皓率先回答

「那也就是說將12個積木分成5堆、7堆、8堆、9堆、10堆、11堆，餘數是零嗎？」同樣的問題我再次敘述清楚以另一種方式再問一次。

「不是」全班又再次的口徑一致的回答。

「我們把餘數為零的算式，稱為整除；也就是說，12可以被1、2、3、4、6、12整除；換句話說1可以整除12、2可以整除12、3可以整除12、4可以整除12、6可以整除12、12可以整除12。」我緩緩的說，我不喜歡玩文字遊戲，但是有些數學的話語需要不斷的強調與重複，學生才會記住。

「凡是可整除12的，也就是1、2、3、4、6、12，我們把這些稱為12的因數。」我知道課本在這部份還未提及因數這個名詞，但是我卻認為這個陌生的專有名詞不需等到最後才呈現，既然概念都已經確

認了，就可以告知學生了，概念呈現一次，例子操作一次，這個專有名詞就可以提及一次，每對話一次，就會更加深學生對因數這個名詞的印象。

「現在請翻開數學課本第四頁」上課至此，我才要求學生把課本打開，因為我希望透過學生對具體物的操作，小組討論和教室內的對話來建立自我的概念，其思維模式並不是定在課本內容。

五、紙版排列

寫完第四頁的練習題後，我再次要求全班把課本闔上，接著我們要進行第二種具體物的操作。我很快的把 8 張正方形紙卡分發到各組，「請利用這 8 張紙卡排成正方形和長方形，紙卡要全部排完，可以有哪些排法？」

各小組很快的開始進行排列，我在黑板上也擺上和學生一模一樣只是較為大型的 8 塊紙版，通常在呈現第二個例子時，我上課的步調會加快些，一來學生已經有概念了，二來要掌控每次上課的進度。

「我們請士閔上來排排看，並且把列式寫下來，而且要講解說明一下。」士閔是一個表達程度不錯的學生，我會點他是因為他具有牽引的作用，畢竟不是每一位學生都能把自我的概念說明清楚讓別人了解，倘若士閔說得不夠完整，其他學童在幫他補充時，也比較能夠聚焦於思考的點。士閔很快的排出兩種長方形，並寫出 $2 \times 4 = 8$ 、 $1 \times 8 = 8$ ，接著他回答說：「有 4 排，有 2 個，總共 8 個」我知道他的意思是對的，但是表達不夠明確，我也注意到他寫的順序和他說的順序是相反的，所以我趕緊問他：「每排有幾個？是排成幾排？」一邊問他我一邊會帶手勢，提醒全班這個排指的是直的紙版的數量，「每排有 2 個，排成 4 排」士閔

迅速的回答，接著說「每排有 1 個，排成 8 排，總共 8 個。」

「沒有了嗎？長方形也可以倒下來看喔！」我提醒全班還有其他的寫法，果真許多學童都能得聽懂我的暗示，紛紛舉手。反應很快的鼎盛率先舉手，我知道他已經了解我想要的答案，「現在我們請鼎盛上來補充」果不其然，他排出另外的兩種長方形，並寫下 $4 \times 2 = 8$ 、 $8 \times 1 = 8$ 兩種算式，依樣畫葫蘆的說著：「每排有 4 個，排成 2 排，總共 8 個；每排有 8 個，排成 1 排，總共 8 個。」

課本的內容這部份是用除法的算式來寫，再次強調整除的概念，最後引出因數這個名詞。我一直覺得這樣的想法並不符合學生的思維，雖然我先前已經提到整除的概念了，但是學生在遇到這種排列紙卡的問題時，幾乎都是以乘法的概念來思維，原因當然有很多，包括這個例子和以往在學習乘法時或面積的求得的情境非常相像，就我的了解，學童相對於除法，乘法更為熟悉，所以以往我按照課本講述時，學童在這部分應該得不到共鳴。這也是我希望她們闔上課本的原因，因為可以奠基在他們的想法來做適當的轉換。不過，我也認為這個例子應該放在倍數的部份，若要舉這個例子，就應該先教倍數再教因數，比較符合學生的思維模式。

我早料到學生會用乘法的算式來表達，所以我在黑板寫出 $1 \times 8 = 8$ ； $2 \times 4 = 8$ ； $4 \times 2 = 8$ ； $8 \times 1 = 8$ 並且再次說到「將被乘數由小到大的列出算式」這個單元，我很強調學生要按照順序的寫出來，因為「缺漏」是學童在因數與倍數解題過程中常犯的毛病。我也早知道課本這部份是用除法來講解，所以我必須將學童的思維搭橋過渡到課本的內容，因為我希望他們能了解書中的意思。

「那我們可不可以用除法的算式來寫？」我用堅定的口吻問著，「可以」全班大聲的回答著。於是我在這四個算式旁邊分別寫下 $8 \div 1 = 8$ ； $8 \div$

$2=4$ ； $8\div 4=2$ ； $8\div 8=1$ ，「如果我們要用紙片來解釋的話，應該可以怎麼說？」我從他們的表情了解到他們無法了解我問話的意思，於是我接著問：「如果將這 8 張紙片分成四排，每一排有幾個？」全班立刻有了回應，「現在有哪一位同學可以幫我們說說看？要按照順序說」眼看這節課就要結束了，就要失去加花片的機會了，所以全班再次陷入搶著回答的情況，我點了花片最少的第五組未舉手的佩瑾回答。

「將這 8 張紙片分成 1 排，每一排有 8 個；將這 8 張紙片分成 2 排，每一排有 4 個；將這 8 張紙片分成 4 排，每一排有 2 個；將這 8 張紙片分成 8 排，每一排有 1 個」佩瑾有些小聲的說著。

「說的很棒吧！請大家給她拍拍手。」我並不會常常要求學生們拍手，但是因為佩瑾是一個非常害羞的女生，拍手的目的是希望能增強她上台的勇氣。

「還記得我們剛剛說的因數吧！有誰可以告訴老師 8 的因數有哪些？為什麼？」問第一個問題時，好多人舉手，但是緊接著第二個問題蹦出來時，我注意到有一半的學童手放下來了，現在的學童還是比較能回答封閉式的問題，較害怕開放性的問題，而且也比較不習慣用話語來表達自我的概念。

「我們請璟瑜來說說看」我望著躍躍欲試的璟瑜，我知道他可以說得很好，因為快下課了，我希望透過璟瑜來幫大家整理一下。

「1、2、4、8 都是 8 的因數，因為 8 除以他們餘數都為零。」璟瑜神情輕鬆的說著。

「說得太棒了！因為 1、2、4、8 都可以整除 8，8 都可以被 1、2、4、8 整除，所以 1、2、4、8 都是 8 的因數。」我再次強調剛剛說過的數學語言，因為要再次在他們的腦中烙印一次。

「現在請大家翻開課本第六頁」我稍加說明一下，就請他們寫練習題了。

即使下課時間到了，我也會要求學童把練習題做一做再離開。因為這樣我就可以了解哪些學童已經了解這個概念了，哪些學童還需要指導。我知道數學溝通能力是需要慢慢引導的，雖然有些學童很快就把練習題寫完了，但是表達自己的想法方面還是不夠完整，不過我會持續有耐心的引導他們。

後記

在這堂課中，我努力的澄清因數這個概念，最主要是希望學童可以了解因數的意義，過去的數學教學中，偏向的是單一向度的陳述，也就是教師直接對學生講述，學童很少被要求去主動分享自己本身對問題的想法，甚至學童間的談話會被視為一種不具建設性的事件，所以，在課堂上我會強化學生主動表達的能力。

不過，一節課只有四十分鐘，不可能每一位學童都被叫到，透過自己的案例紀錄，可以知道這節課有多少位學童上台發表，下節課時就可以換其他同學分享自己的想法，儘量讓每一個學童都能有發表的機會，此外，透過這個紀錄，也讓我可以去思索自己在每段的教學安排是否恰當，更可以自我後設認知對學生的思維與表達是否有充分引導，以幫助自己的教學精益求精。